

EMPAQUETAMIENTO ÓPTIMO BIDIMENSIONAL CON ROTACIÓN DE PIEZAS USANDO UN ALGORITMO HÍBRIDO DE BÚSQUEDA EN VECINDAD VARIABLE Y RECOCIDO SIMULADO.

Optimal two-dimensional packing with rotatable items using a hybrid algorithm of variable neighborhood search and simulated annealing.

RESUMEN

Los problemas de empaquetamiento tienen un amplio espectro de aplicación en ingeniería de producción, ya que muchos problemas requieren la ubicación de rectángulos en una hoja de material rectangular de mayor tamaño. Se presenta un modelo matemático del problema de empaquetamiento bidimensional permitiendo rotación de las piezas, donde el objetivo es minimizar el área desperdiciada, se utiliza una metaheurística híbrida, búsqueda en vecindario variable y recocido simulado. La eficiencia de la metodología propuesta es evaluada usando 50 casos de estudio, comparándose con dos técnicas presentadas en la literatura especializada que no consideran rotación de piezas, obteniendo resultados de excelente calidad.

PALABRAS CLAVES: empaquetamiento bidimensional, optimización combinatorial, recocido simulado, rotación de piezas, vecindario variable,

ABSTRACT

The packing problems have a large spectrum of application in production engineering, as many problems require the location of rectangles in a larger rectangular material. There is a mathematical model of the two-dimensional packing problem allowing rotation, where the objective is to minimize the wasted area, by means of hybrid metaheuristic, variable neighborhood search and simulated annealing. The efficiency of the proposed methodology is evaluated using 50 case studies, comparing with two techniques presented in the specialized literature that don't implement non-oriented items and getting results of excellent quality.

KEYWORDS: combinatorial optimization, non-oriented items, simulated annealing, two-dimensional bin packing, variable neighborhood search.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de empaquetamiento multidimensional ha presentado gran interés en los últimos años [1, 2, 3]. En muchos de ellos las piezas a ser ubicadas tienen una orientación única que no permite rotación de las piezas las cuales presentan diferentes formas geométricas. También existen problemas donde se permite rotación de piezas y que son resueltos sin esta consideración [4], presentándose ineficiencias en el proceso de solución. Por lo anterior permitir rotación de piezas en la metodología representa una mejora en el proceso, reflejada en soluciones de mejor calidad y menores esfuerzos computacionales.

En este documento se presenta el problema de empaquetamiento óptimo bidimensional tipo guillotina permitiendo la rotación de piezas y el mismo en la literatura especializada se puede encontrar bajo la denominación *packing of non-oriented items* [3]. Su

Fecha de Recepción: 26 de enero de 2009
Fecha de Aceptación: 28 de abril de 2009

DAVID ÁLVAREZ MARTÍNEZ

Ingeniero de Sistemas y Computación.
Joven Investigador
COLCIENCIAS-Universidad Tecnológica de Pereira
davidalv@utp.edu.co

ELIANA TORO OCAMPO

Ingeniera Industrial, M.Sc.
Docente Asistente
Facultad de Ingeniería Industrial
Universidad Tecnológica de Pereira
elianam@utp.edu.co

RAMÓN GALLEGO RENDÓN

Ingeniero Electricista. Ph.D.
Docente Titular
Programa Ingeniería Eléctrica
Universidad Tecnológica de Pereira
ragr@utp.edu.co

aplicación puede ser tanto para los problemas de *Bin Packing* como de *Strip Packing*.

En este trabajo es permitida la rotación de piezas con el fin de aumentar el espacio de soluciones y así obtener respuestas de mejor calidad a las ya conocidas. El número de piezas colocadas en el tablero está restringido al área específica de trabajo. Para su solución se usa un algoritmo híbrido conformado por un algoritmo de vecindad variable y un algoritmo de recocido simulado.

La metodología propuesta es confrontada con otras de la literatura especializada y para ello se utilizan 50 casos de estudio tomados de [5]. Del análisis realizado se destaca el buen desempeño presentado por la metodología propuesta en la totalidad de los casos que fueron estudiados.

Este artículo tiene la siguiente estructura: en la sección 2 se presenta una definición del problema de

empaquetamiento óptimo bidimensional, en la sección 3 se plantea el modelo matemático, en la sección 4 se presenta el método de solución, en la sección 5 se muestran los casos de prueba y resultados obtenidos, comparando las respuestas con rotación y sin rotación y finalmente en la sección 6 se presentan las conclusiones y perspectivas de trabajos futuros.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El problema empaquetamiento bidimensional con rotación se define como sigue: Las hojas de material son unidades rectangulares y las piezas a ser ubicadas dentro de la misma pueden ser rotadas 90° [1]. El objetivo es ubicar la mayor cantidad de piezas en la hoja de material minimizando la cantidad de material desperdiciado cumpliendo con las siguientes condiciones:

- Cada pieza debe estar ubicada completamente en el material paralelo a los ejes del mismo.
- Dos piezas no deben estar traslapadas
- Las piezas pueden rotar 90° en todas las posibles direcciones.

Este problema tiene muchas aplicaciones interesantes tales como corte de piezas de todo tipo de materiales que no tienen tramas: vidrios, plásticos, espumas, láminas, maderas entre otras.

En la figura 1. Se ilustra el proceso de rotación a 90° .

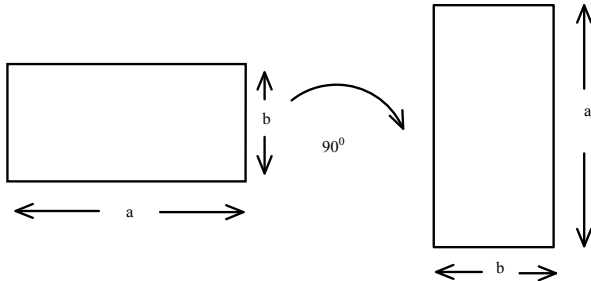


Figura 1. Rotación de una pieza.

3. MODELO MATEMÁTICO

A continuación se describen algunas notaciones necesarias para comprender el modelo matemático del problema.

L : Largo de la hoja de material.

W : Ancho de la hoja de material.

N : Número disponible de rectángulos para posicionar en la hoja de material.

p_i : Largo del rectángulo i .

q_i : Ancho del rectángulo i .

(x_i, y_i) : Variables que indican la localización del rectángulo i teniendo como punto de referencia el vértice inferior izquierdo de la hoja de material.

s_i : Variable binaria que indica si el rectángulo i fue ubicado en la hoja de material. Cuando esto ocurre $s_i = 1$, en caso contrario $s_i = 0$.

(l_{xi}, l_{yi}) : Variables binarias que indican para cual eje de la hoja de material, el lado p_i del rectángulo i está en paralelo.

(w_{xi}, w_{yi}) : Variables binarias que indican para cual eje de la hoja de material, el lado q_i del rectángulo i está en paralelo.

Adicionalmente, existen otras variables que son usadas para indicar el posicionamiento de los rectángulos en relación a otros rectángulos.

a_{ik} : En caso de que sea 1, indica que el rectángulo i está a la izquierda del rectángulo k .

b_{ik} : En caso de que sea 1, indica que el rectángulo i está a la derecha del rectángulo k .

c_{ik} : En caso de que sea 1, indica que el rectángulo i está atrás del rectángulo k .

d_{ik} : En caso de que sea 1, indica que el rectángulo i está al frente del rectángulo k .

M : Número entero muy grande.

La función objetivo consiste en minimizar la cantidad de material desperdiciado tal como se expresa en la ecuación (1).

$$\text{Min } L \cdot W - \sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i \cdot s_i \quad (1)$$

Sujeto a

1. Evitar superposición de rectángulos en la hoja de material tal como se muestra en las ecuaciones (2), (3), (4) y (5).

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i w_{xi} \leq x_k + (1 - a_{ik}) \cdot M, \forall i, k, i < k \quad (2)$$

$$x_k + p_k \cdot l_{xk} + q_k w_{xk} \leq x_i + (1 - b_{ik}) \cdot M, \forall i, k, i < k \quad (3)$$

$$y_i + p_i \cdot l_{yi} + q_i w_{yi} \leq y_k + (1 - c_{ik}) \cdot M, \forall i, k, i < k \quad (4)$$

$$y_k + p_k \cdot l_{yk} + q_k w_{yk} \leq y_i + (1 - d_{ik}) \cdot M, \forall i, k, i < k \quad (5)$$

2. Garantizar que el par de rectángulos evaluados con las ecuaciones anteriores estén dentro de la hoja de material, tal como se muestra en la ecuación (6).

$$a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik} \geq s_i + s_k - 1, \forall i, k, i < k \quad (6)$$

3. Garantizar que un posicionamiento de rectángulos, obedezca a las limitaciones físicas dadas por las dimensiones de la hoja de material, tal como se muestra en las ecuaciones (7) y (8).

$$x_i + p_i \cdot l_{xi} + q_i w_{xi} \leq L + (1 - s_i) \cdot M, \forall i \quad (7)$$

$$y_i + p_i \cdot l_{yi} + q_i w_{yi} \leq W + (1 - s_i) \cdot M, \forall i \quad (8)$$

4. MÉTODO DE SOLUCIÓN

El algoritmo propuesto fue soportado por la metodología presentada en [6]. En la figura 2 se representa el esquema de la metodología implementada.



Figura 2. Esquema de la metodología.

El resumen de la metodología propuesta es el siguiente:

4.1 Preprocesamiento de las piezas

El preprocesamiento consiste en cargar y duplicar las piezas de la siguiente forma, para cada pieza cargada, si el ancho de la pieza es diferente al largo de la pieza entonces, duplique la pieza donde el largo de la pieza duplicada es el ancho de la pieza original y el ancho de la pieza duplicada es el largo de la pieza original, de lo contrario, no la duplique.

4.2 Algoritmo de búsqueda aleatoria binaria

El algoritmo I determina los tipos de cada corte a utilizar sea horizontal o vertical, para este algoritmo se usa un esquema de vecindario variable [7].

Inicialmente el vecindario de búsqueda consiste en modificar de forma aleatoria la orientación de un corte, posteriormente, si esta modificación no genera una mejora en la función objetivo se procede a modificar dos cortes y así sucesivamente. En el momento en que la mejor solución hallada hasta el momento (incumbente) sea actualizada se regresa nuevamente al primer vecindario. Esta metodología de búsqueda local permite diversificar cuando la función objetivo no es mejorada y hacer una búsqueda local más detallada en el momento de actualizarse la incumbente, de esta forma se logra un algoritmo computacionalmente eficiente.

4.3 Algoritmo de búsqueda aleatoria real

El segundo algoritmo determina la distancia a la que se debe realizar cada corte, para ello se utiliza un algoritmo de búsqueda aleatoria que modifica iterativamente los cortes seleccionados por el algoritmo I reduciendo paulatinamente el ancho de búsqueda, mediante un factor de recocido que a medida que el algoritmo evoluciona se hace mas determinístico por lo cual este factor se acerca a cero. El algoritmo II está inspirado en la filosofía del recocido simulado [8] en donde a medida que evoluciona el grado de aleatoriedad disminuye.

4.4 Algoritmo constructivo

El algoritmo constructivo ubica las piezas en los diferentes sub-espacios definidos por los tipos de los cortes y las distancias de estos. Cada sub-espacio ubica arreglos de la misma clase de piezas, para esto se determina el desperdicio para cada tipo de arreglo asegurando se cumpla la restricción de demanda, de tal forma que si el arreglo esta conformado por piezas duplicadas se modifica la demanda de la pieza original y la duplicada.

5. RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la ejecución de 50 casos de estudio referenciados en [5], en la tabla 1 se presentan las respuestas obtenidas de solucionar los casos con 3 metodologías diferentes: la primera corresponde a los resultados reportados en la referencia [5], la segunda a los resultados reportados en la referencia [6], la tercera corresponde a los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto en este artículo. De esta tabla se observa que los mejores resultados fueron obtenidos con el algoritmo propuesto y logra igualar o superar a los dos algoritmos referenciados en los casos estudiados.

| Caso de Prueba | | Resultados Referencia [5] Sin Rotación | | Resultados Referencia [6] Sin Rotación | | Resultados Algoritmo Propuesto Con Rotación | |
|----------------|-----------------|---|-------------------|---|-------------------|--|-------------------|
| Caso | Área Disponible | Área utilizada | Porcentaje de uso | Área utilizada | Porcentaje de uso | Área utilizada | Porcentaje de uso |
| 1 | 2004002 | 1964584 | 0,9803 | 1990188 | 0,9931 | 1990188 | 0,9931 |
| 2 | 2941249 | 2867218 | 0,9748 | 2887424 | 0,9817 | 2898620 | 0,9855 |
| 3 | 2709525 | 2656454 | 0,98040 | 2679192 | 0,9888 | 2679192 | 0,9888 |
| 4 | 2479752 | 2370496 | 0,9559 | 2443300 | 0,9853 | 2443300 | 0,9853 |
| 5 | 2319604 | 2281600 | 0,9836 | 2275995 | 0,9812 | 2287419 | 0,9861 |
| 6 | 2976190 | 2918503 | 0,9806 | 2931250 | 0,9849 | 2959476 | 0,9943 |
| 7 | 2265650 | 2227422 | 0,9831 | 2240954 | 0,9891 | 2244518 | 0,9906 |
| 8 | 2272792 | 2238658 | 0,9849 | 2247791 | 0,9890 | 2248697 | 0,9893 |
| 9 | 2764384 | 2690038 | 0,9731 | 2717389 | 0,9830 | 2724090 | 0,9854 |
| 10 | 2624232 | 2574750 | 0,9414 | 2579620 | 0,9830 | 2589880 | 0,9869 |

| | | | | | | | |
|----|---------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|
| 11 | 3235950 | 3115873 | 0,9628 | 3162818 | 0,9774 | 3181816 | 0,9832 |
| 12 | 2921333 | 2837743 | 0,9713 | 2856772 | 0,9779 | 2875058 | 0,9841 |
| 13 | 2553588 | 2501400 | 0,9795 | 2525754 | 0,9891 | 2525754 | 0,9891 |
| 14 | 2436480 | 2343169 | 0,9617 | 2350960 | 0,9649 | 2358096 | 0,9678 |
| 15 | 3072540 | 3017184 | 0,9819 | 3031675 | 0,9867 | 3046710 | 0,9915 |
| 16 | 2174340 | 2102756 | 0,9670 | 2136724 | 0,9827 | 2139405 | 0,9839 |
| 17 | 2401595 | 2276323 | 0,9478 | 2317299 | 0,9649 | 2342832 | 0,9755 |
| 18 | 2827455 | 2736919 | 0,9679 | 2751962 | 0,9733 | 2768626 | 0,9791 |
| 19 | 2181600 | 2145051 | 0,9832 | 2149967 | 0,9855 | 2156799 | 0,9886 |
| 20 | 3157786 | 2994717 | 0,9483 | 3050737 | 0,9661 | 3068481 | 0,9717 |
| 21 | 2953340 | 2900376 | 0,9820 | 2892501 | 0,9794 | 2908884 | 0,9849 |
| 22 | 3204790 | 3066344 | 0,9568 | 3086854 | 0,9632 | 3120352 | 0,9736 |
| 23 | 2763800 | 2676037 | 0,9682 | 2686966 | 0,9722 | 2730945 | 0,9881 |
| 24 | 2408892 | 2287330 | 0,9495 | 2292061 | 0,9515 | 2323423 | 0,9645 |
| 25 | 3163699 | 3037774 | 0,9601 | 3108967 | 0,9827 | 3111640 | 0,9835 |
| 26 | 2805712 | 2695345 | 0,9606 | 2748756 | 0,9797 | 2758701 | 0,9832 |
| 27 | 2526230 | 2383242 | 0,9433 | 2479747 | 0,9816 | 2481420 | 0,9822 |
| 28 | 2532060 | 2446799 | 0,9663 | 2490028 | 0,9834 | 2492867 | 0,9845 |
| 29 | 2230605 | 2158548 | 0,9676 | 2186885 | 0,9804 | 2197516 | 0,9851 |
| 30 | 2514609 | 2471150 | 0,9827 | 2462305 | 0,9792 | 2473430 | 0,9836 |
| 31 | 2727200 | 2583155 | 0,9471 | 2666656 | 0,9778 | 2684286 | 0,9842 |
| 32 | 2699860 | 2618956 | 0,9700 | 2628854 | 0,9737 | 2655905 | 0,9837 |
| 33 | 2262910 | 2216886 | 0,9796 | 2224667 | 0,9831 | 2229412 | 0,9851 |
| 34 | 2330028 | 2279436 | 0,9782 | 2284359 | 0,9804 | 2296139 | 0,9855 |
| 35 | 2882646 | 2787529 | 0,9670 | 2798761 | 0,9709 | 2816649 | 0,9771 |
| 36 | 2658656 | 2508545 | 0,9435 | 2588999 | 0,9738 | 2615425 | 0,9837 |
| 37 | 2817192 | 2667081 | 0,9467 | 2738592 | 0,9721 | 2765134 | 0,9815 |
| 38 | 2618181 | 2566844 | 0,9803 | 2567650 | 0,9807 | 2591201 | 0,9896 |
| 39 | 2097396 | 2029177 | 0,9674 | 2068032 | 0,9860 | 2069913 | 0,9868 |
| 40 | 2597700 | 2540141 | 0,9778 | 2531199 | 0,9744 | 2544728 | 0,9796 |
| 41 | 2718228 | 2686780 | 0,9884 | 2677183 | 0,9849 | 2702052 | 0,9940 |
| 42 | 2379541 | 2306316 | 0,9692 | 2339089 | 0,9830 | 2357797 | 0,9908 |
| 43 | 2519286 | 2419778 | 0,9605 | 2454036 | 0,9741 | 2460046 | 0,9764 |
| 44 | 2575800 | 2493761 | 0,9681 | 2507026 | 0,9733 | 2529588 | 0,9820 |
| 45 | 2497225 | 2418204 | 0,9683 | 2414067 | 0,9667 | 2443486 | 0,9784 |
| 46 | 2817360 | 2693446 | 0,9560 | 2750589 | 0,9763 | 2764739 | 0,9813 |
| 47 | 2484896 | 2388374 | 0,9611 | 2414822 | 0,9718 | 2432533 | 0,9789 |
| 48 | 3007466 | 2943027 | 0,9785 | 2933482 | 0,9754 | 2944504 | 0,9790 |
| 49 | 2868953 | 2819262 | 0,9826 | 2815017 | 0,9812 | 2830906 | 0,9867 |
| 50 | 2234752 | 2161976 | 0,9674 | 2194973 | 0,9822 | 2199821 | 0,9843 |

Tabla 1. Resultados de la ejecución del caso 1 hasta el caso 50.

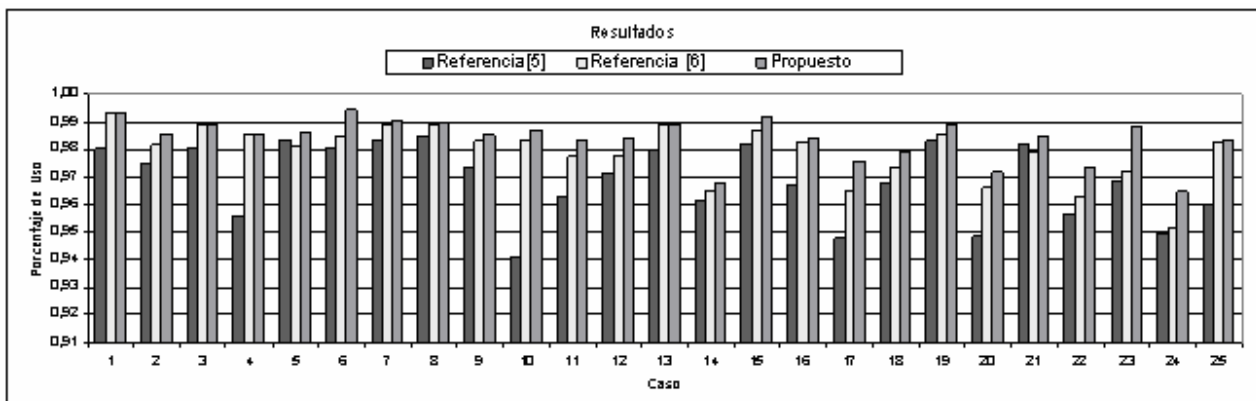


Figura 3. Gráfico comparativo: referencia [5], referencia [6], algoritmo propuesto.

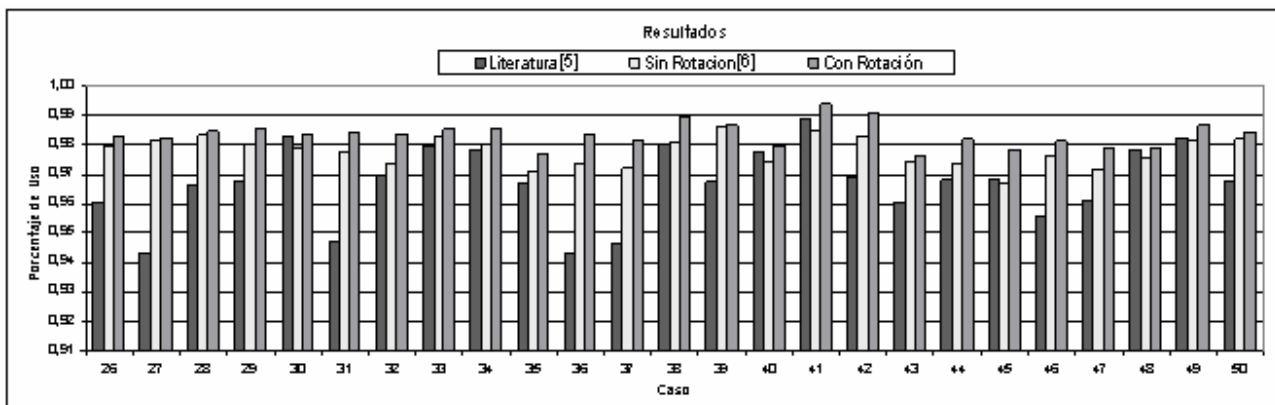


Figura 4. Gráfico comparativo: referencia [5], referencia [6], algoritmo propuesto.

En las figuras 3 y 4 representan gráficamente los resultados presentados en la tabla 1, en estas se visualiza que para todos los casos el algoritmo propuesto supera o por lo menos alcanza las mejores respuestas obtenidas con los algoritmos reportados en [5] y [6].

| Resumen de Respuestas | Respecto a [5] | Respecto a [6] |
|------------------------------------|----------------|----------------|
| Soluciones no superadas | 0 | 0 |
| Soluciones superadas entre 0 y 1 % | 17 | 44 |
| Soluciones superadas entre 1 y 2 % | 20 | 6 |
| Soluciones superadas entre 2 y 3 % | 8 | 0 |
| Soluciones superadas entre 3 y 4 % | 3 | 0 |
| Soluciones superadas en mas de 4 % | 2 | 0 |

Tabla 2. Número de casos superados respecto a [5] y [6].

En la tabla 2 y en la figura 5, se presenta un resumen de resultados obtenidos con base en el porcentaje de mejora de la solución de cada caso de estudio con respecto a las soluciones en [5] y [6]. Con respecto a [6] se observa que en su gran mayoría las respuestas reportadas son

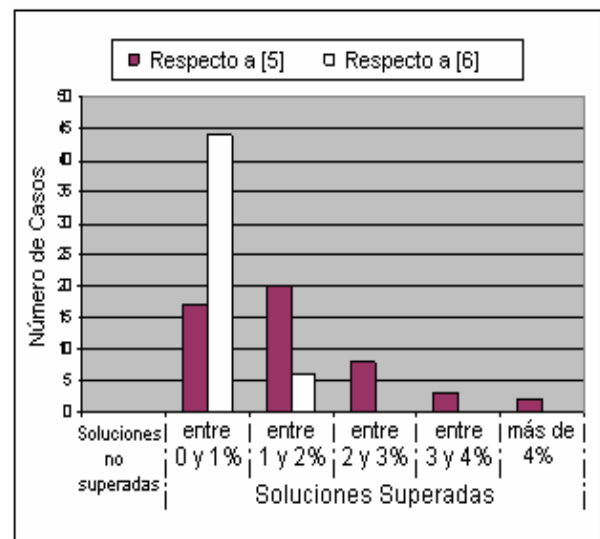


Figura 5. Resumen de Respuestas.

superadas entre 0% y 1%, con respecto a la referencia [5] gran parte de los resultados presentan mejoría mayor al 1%. La inclusión de la rotación de piezas en la metodología ejerce una influencia positiva presentando resultados de mejor calidad a los reportados en [5] y [6].

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se resolvió el problema de empaquetamiento bidimensional con rotación de piezas mediante un algoritmo híbrido constructivo de búsqueda en vecindad variable y recocido simulado, obteniendo resultados de excelente calidad.

Se corrobora que la metodología implementada en [6], es una metodología robusta y con grandes propiedades para solucionar los problemas de empaquetamiento de mercancías.

Se encontraron soluciones superiores nunca antes reportadas en la literatura especializada para los 50 casos de estudio tomados de [5].

Se presenta un modelo matemático que puede ser de gran ayuda para tratar el problema mediante un método exacto, tal como el *Branch and Bound* [9].

Los resultados obtenidos muestran que aplicando rotación de piezas se obtienen soluciones de mejor calidad evaluada en la función objetivo y con tiempos de cómputo inferiores comparados con algoritmos que no consideran rotación.

Existen muchos problemas de ingeniería de producción que podrían considerar rotación de piezas con el fin de obtener mejoras sustanciales en el objetivo a optimizar.

El algoritmo propuesto podría ser extendido a la solución de problemas de *Strip Packing* y empaquetamiento tridimensional.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Basal N, Sviridenko M. "New approximability and unapproximability results for 2-dimensional packing". In Proceedings of 15 Annual Symposium on Discrete Algorithms, p 189-196. ACM/SIAM, 2004.
- [2] Caprara A. "Packing 2-dimensional bins in harmony" 43 IEEE symp. on Found of comp. Science. p490-499, 2002.
- [3] Dell Amico M, Martello S, Vigo D. "A lower bound for the non-oriented two dimensional bin packing problema". Discrete Applied Mathematics, 118:13-14, 2002.
- [4] Toro E, Rueda A. "Algoritmo de Búsqueda Tabú aplicado a la solución del problema de corte bidimensional guillotinado". Scientia et Technica No 37. Diciembre 2007.
- [5] Yaodong C. "An exact algorithm for generating homogenous T-shape cutting patterns". Computers & Operations Research. 2007, 34(4): 1107-1120, Disponible en Internet en: <http://www.gxnu.edu.cn/Personal/ydcui/English/Paper.htm>
- [6] Toro E, Garces R, Ruiz H. "Solución del problema de empaquetamiento óptimo bidimensional usando un algoritmo híbrido constructivo de búsqueda en vecindad variable y recocido simulado". Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia No 46 diciembre 2008.
- [7] Hansen P, Nenad J, Moreno J. "Búsqueda en entorno variable . Inteligencia artificial" Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial. Vol 19. 2003.
- [8] Toro E, Gallego R, Escobar A. "Técnicas Metaheurísticas de Optimización". Universidad Tecnológica de Pereira. 2008.
- [9] Romero R, Gallego R, Escobar A. "Programación Lineal Entera". Universidad Tecnológica de Pereira. 2007.